0.1 Cylinder object and Left homotopy

以下、圏 C は model category とする。

Definition 0.1.1

$A \in C$ に対し、A の cylinder object である $A \wedge I$ とは、$1+1 : A\coprod A \longrightarrow A$ に対し、

$$1+1 : A\coprod A \longrightarrow A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$$

という分解ができる object である。また、$A\coprod A \longrightarrow A \wedge I$ が cofibration であるとき、$A \wedge I$ を good cylinder object とよぶ。さらに、加えて、$A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$ が fibration であるとき（つまり acyclic fibration）であるとき、$A\wedge I$ を very good cylinder object と呼ぶ。（……長い）

Remmark 0.1.2

A の very good cylinder object が存在する。

proof) $1+1 : A\coprod A \longrightarrow A$ に対し、MC5) を用いれば、very good cylinder object を構成できる。

Example 0.1.3

Top において空間 A の cylider object として $A \times I$ が考えられる。分解としては、

$$A\coprod A = A \times \{0\} \cup A \times \{1\} \hookrightarrow A \times I \longrightarrow A$$

が考えられる。ただし、Top の cofibration の指定はここでは、relative cell complex の inclusion（の retract）と定めているので、

$$A \times \{0\} \cup A \times \{1\} \hookrightarrow A \times I$$

は cofibration かどうかは定かでない。つまり good cylinder object かどうかは定かでない。

Lemma 0.1.4

$A \in C$: cofibrant で $A \wedge I$ が good ならば、

$$i_0, i_1 : A \longrightarrow A \wedge I$$

は acyclic cofibration である。

proof)　　$i_0 : A \longrightarrow A \wedge I$ について考えてみる。

$$1 : A \xrightarrow{i_0} A \wedge I \xrightarrow{\sim} A$$

であるので MC2) により、i_0 は weak equivalence である。ところで $A \coprod A$ というのは $A \longleftarrow \phi \longrightarrow A$ の push out であるので、A が cofibrant であるので、

$$\begin{array}{ccc} \phi & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle \text{cofibration}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle in_0} \\ A & \xrightarrow[in_1]{} & A \coprod A \end{array}$$

の図式において、in_0 も cofibration になる。

$$i_0 : A \xrightarrow{in_0} A \coprod A \longrightarrow A \wedge I$$

good cylinder object の定義から後ろの map が cofibration なので、i_0 が cofibration である。

□

Definition 0.1.5

C の射 $f, g : A \longrightarrow X$ が left homotopic であるとは、

$$f + g : A \coprod A \longrightarrow X$$

が $A \wedge I$ に拡張できることを言う。つまり、

$$H : A \wedge I \longrightarrow X$$

が存在し、$H \circ i_0 = f$, $H \circ i_1 = g$ を満たすことである。このとき、H を f と g の left homotopy と呼び、$f \overset{l}{\sim} g$ とかく。また、$A \wedge I$ が good cylinder object のとき、H を good left homotopy。さらに very good cylimder object のときは、very good left homotopy と呼ぶ。

Lemma 0.1.6

$f \overset{l}{\sim} g : A \longrightarrow X$ に対し、f と g の good left homotopy が存在する。

proof)　　$H : A \wedge I \longrightarrow X$ を f と g の単なる left homotopy とする。このとき、

$$i_0 + i_1 : A \coprod A \longrightarrow A \wedge I$$

に MC5) を用いれば、

$$i_0 + i_1 : A \coprod A \hookrightarrow A \wedge I' \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A \wedge I$$

よって、$A \wedge I \overset{\sim}{\longrightarrow} A$ を合成すれば、

$$1 + 1 : A \coprod A \hookrightarrow A \wedge I \overset{\sim}{\longrightarrow} A$$

となり、$A \wedge I'$ が good cylinder object であることがわかる。よって、

$$A \wedge I' \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A \wedge I \overset{H}{\longrightarrow} X$$

を考えると、これが good left homotopy である。

□

Lemma 0.1.7

$f \overset{l}{\sim} g : A \longrightarrow X$ に対し、X が fibrant なら、f と g の very good left homotopy が存在する。

proof)　　Lemma 0.1.6 より、f と g のgood left homotopy

$$H : A \wedge I \longrightarrow X$$

が存在する。$A \wedge I \overset{\sim}{\longrightarrow} A$ を MC5 と MC2 を用いて分解すれば、

$$A \wedge I \overset{\sim}{\hookrightarrow} A \wedge I' \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A$$

となる。$A \wedge I'$ は very good cylinder object である。

$$\begin{array}{ccc} A \wedge I & \overset{H}{\longrightarrow} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \wedge I' & \longrightarrow & * \end{array}$$

の可換図で、左縦は acyclic cofibration、X が fibration なので、右縦は fibration なので、MC4 から、この図式の Lift

$$\widetilde{H} : A \wedge I' \longrightarrow X$$

が存在する。これが、very good left homotopy である。

□

Lemma 0.1.8

$f \overset{l}{\sim} g : A \longrightarrow X$ において、f が weak equivalence ならば、g : weak equivalence である。

proof)　$H : A \wedge I \longrightarrow X$ を f と g の homotopy とする。

$$i_0, i_1 : A \longrightarrow A \wedge I$$

は $A \wedge I \overset{\sim}{\longrightarrow} A$ を合成すれば恒等射なので、MC2 より、i_0, i_1 も weak equivalence である。$f = H \circ i_0$ が weak equivalence なので再び MC2 により、H が weak equivalence であり、$g = H \circ i_1$ が weak equivalence である。

□

Lemma 0.1.9

A : cofibrant ならば、$\overset{l}{\sim}$ は $\mathrm{Hom}(A, X)$ における同値関係である。

proof)　まず反射律から。$f : A \longrightarrow X$ に対し、

$$1 + 1 : A \coprod A \overset{1+1}{\longrightarrow} A \overset{=}{\longrightarrow} A$$

という分解があるから、A は A の cylinder object である。このおき、$f : A \longrightarrow X$ は f と f を繋ぐ left homotopy であるため、$f \overset{l}{\sim} f$ である。

次に対称律だが、$f \overset{l}{\sim} g : A \longrightarrow X$ とする。このおき、left homotopy を $H : A \wedge I \longrightarrow X$ とする。$s : A \coprod A \longrightarrow A \coprod A$ を入れ替えの射、つまり、$i_0 + i_1 : A \longrightarrow A \wedge I$ に対し、$(i_0 + i_1) \circ s = i_1 + i_0$ となるわけである。

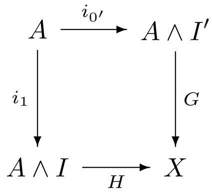
$$1 + 1 : A \coprod A \overset{(i_0+i_1)\circ s}{\longrightarrow} A \wedge I \longrightarrow A$$

でもあるため、この分解も含めた cylinder object の $A \wedge I$ を考えれば、$H : A \wedge I \longrightarrow X$ において、$H \circ i_0 = g$, $H \circ i_1 = f$ となり、$g \overset{l}{\sim} f$ である。

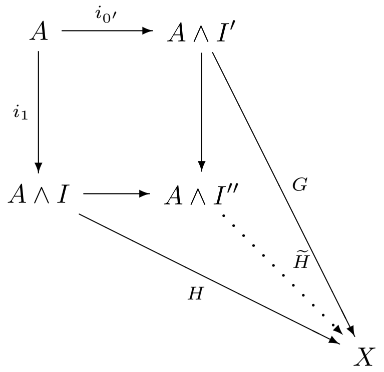
最後に推移律である。$f \overset{l}{\sim} g$, $g \overset{l}{\sim} h : A \longrightarrow X$ とする。

$$H : A \wedge I \longrightarrow X \ , \ G : A \wedge I' \longrightarrow X$$

をそれぞれ、f と g、g と h の good left homotopy とする。このとき、



は可換である。よって、$A \wedge I \overset{i_1}{\longleftarrow} A \overset{i'_0}{\longrightarrow} A \wedge I'$ の図式の push out を $A \wedge I''$ とおけば、push out の性質から、



であり、$1+1 : A \coprod A \overset{i_0 + i'_1}{\longrightarrow} A \wedge I'' \longrightarrow A$ の分解ができる。ここで、$A \wedge I'' \longrightarrow A$ が weak equivalence かどうかであるが、A が cofibrant の仮定から、i_0 は acyclic cofibration である。これより、上の図式における $A \wedge I \longrightarrow A \wedge I''$ も acyclic cofibration である。

$$A \wedge I \longrightarrow A \wedge I'' \longrightarrow A$$

自体は weak equivalence であり、MC2 から $A \wedge I'' \longrightarrow A$ も weak equivalence であることがわかる。$\widetilde{H} : A \wedge I'' \longrightarrow X$ が f と h を繋ぐ left homotopy である。よって、$f \overset{l}{\sim} h$

□

Definition 0.1.10

A : cofibrant において、$\mathrm{Hom}_C(A,X)$ の $\overset{l}{\sim}$ における同値類 $\pi^l(A,X)$ とおく。

Lemma 0.1.11

$p : X \longrightarrow Y$ を acyclic fibration とする。このとき、

$$p_* : \pi^l(A,X) \longrightarrow \pi^l(A,Y)$$

を $[f] \mapsto [p \circ f]$ で定義すれば、これは全単射である。

proof)　　まずは全射から示す。$[f] \in \pi^l(A,Y)$ に対し、A が cofibrant なので、

$$\begin{array}{ccc} \phi & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle \text{cofibration}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

の可換図で MC4 により、この Lift である $\tilde{f} : A \longrightarrow X$ が存在する。よって、$[\tilde{f}] \in \pi^l(A,X)$ を考えれば、$p_*[\tilde{f}] = [p \circ \tilde{f}] = [f]$ である。よって全射である。

続いて単射である。$[f],[g] \in \pi^l(A,X)$ に対し、$p_*[f] = p_*[g]$ とする。つまり、$p \circ f \overset{l}{\sim} p \circ g$ である。その good left homotopy を $H : A \wedge I \longrightarrow Y$ とする。

$$\begin{array}{ccc} A \coprod A & \xrightarrow{f+g} & X \\ {\scriptstyle \text{cofibration}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A \wedge I & \xrightarrow[H]{} & Y \end{array}$$

は可換であり、同じく MC4 により、この図式の Lift

$$\widetilde{H} : A \wedge I \longrightarrow X$$

が存在し、これが f と g を繋ぐ left homotopy となる。よって、$f \overset{l}{\sim} g$ であり、$[f] = [g] \in \pi^l(A,X)$ なので単射。

□

Lemma 0.1.12

X : fibrant で、$f \overset{l}{\sim} g : A \longrightarrow X$ とすると、任意の $h : A' \longrightarrow A$ に対し、$f \circ h \overset{l}{\sim} g \circ h : A' \longrightarrow X$

proof) Lemma 0.1.7 により、f と g を繋ぐ very good left homotopy

$$H : A \wedge I \longrightarrow X$$

が存在する。A' の good cylinder object を選ぶ。

$$1 + 1 : A' \coprod A' \overset{j}{\hookrightarrow} A' \wedge I \overset{\sim}{\longrightarrow} A'$$

の分解に対し、

$$\begin{array}{ccccc} A' \coprod A' & \xrightarrow{h \coprod h} & A \coprod A & \xrightarrow{i} & A \wedge I \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A' \wedge I & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[h]{} & A \end{array}$$

の図式で、j : cofibration で、p : acyclic fibration だから MC4 によって、この図式の Lift が存在する。これを、

$$k : A' \wedge I \longrightarrow A \wedge I$$

とおく。このとき、$H \circ k : A' \wedge I \longrightarrow X$ を考えれば、これが、$f \circ h$ と $g \circ h$ をつなぐ left homotopy である。

□

Remmark 0.1.13

$f : A \longrightarrow X$, $g \overset{l}{\sim} h : A' \longrightarrow A$ ならば、$f \circ g \overset{l}{\sim} f \circ h$

proof) こちらの証明は容易。g と h の left homotopy を

$$H : A' \wedge I \longrightarrow A$$

とすれば、$f \circ H$ が $f \circ g$ と $f \circ h$ を繋ぐ left homotopy である。

□

Lemma 0.1.14

X：fibrant のとき、

$$\pi^l(A', A) \times \pi^l(A, X) \longrightarrow \pi^l(A', X)$$

を $([h],[f]) \mapsto [f \circ h]$ で定義すると、これは well definded

proof)　$[h],[h'] \in \pi^l(A', A)$，$[f],[f'] \in \pi^l(A, X)$ に対し、$[h] = [h']$，$[f] = [f']$ とする。つまり、$h \overset{l}{\sim} h'$，$f \overset{l}{\sim} f'$ である。このとき、Lemma 0.1.12 と Remmark 0.1.13 によって、

$$f \circ h \overset{l}{\sim} f' \circ h \overset{l}{\sim} f' \circ h'$$

なので、$[f \circ h] = [f' \circ h']$

□